Université d'Orléans **Session de Juin 2021**
Diplôme d'Accès aux Etudes Universitaires

EPREUVE DE MATHEMATIQUES
DAEU B

Durée : 4 heures

Les documents et calculatrices sont autorisés

.

Les exercices sont indépendants les uns des autres.

Exercice 1 : *Nombres complexes*

On rappelle que i désigne le nombre complexe tel que $i^2 = -1$.

1) Soit $z = \dfrac{3+2i}{2+2i}$. Donner la forme algébrique du nombre complexe z.

2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante :

$$3iz - 2z = 1 + i$$

3) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante:

$$z + 2\overline{z} = 2 - i$$

où $\overline{z}$ désigne le conjugué du nombre complexe z.

4) Soit $z = 5-3i$ et $z' = 1+2i$ deux nombres complexes. Calculer le module de z puis le module de z'. En déduire le module du nombre complexe $\dfrac{z}{z'}$.

5) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante :

$$z^2 - 4z + 5 = 0$$

Exercice 2 : *Résolutions d'inéquations .*

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante :

$$\frac{(-2x+2)(x+1)}{(x-1)(1-3x)} < 0$$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante :

$$\ln(x+1) < 1$$

3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante :

$$e^{3x+2} > e^2$$

Exercice 3 : *Equations du second degré .*

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante :

$$2x^2 + 3x - 2 = 0$$

En déduire le signe pour tout $x \in \mathbb{R}$ du trinôme $2x^2 + 3x - 2$.

2) En utilisant les résultats de la question précédente, déterminer les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation suivante :

$$2(\ln x)^2 + 3(\ln x) - 2 = 0$$

Exercice 4 : *Résolution d'un système d'équations .*

Résoudre le système à deux inconnues suivant :

$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ \\ -11x - 6y = -7 \end{cases}$$

Exercice 5 :*Calcul algébrique .*

Vérifier l'égalité suivante pour tout $x \in R$:

$$\frac{e^x + e^{-x} + 1}{e^x + 1} = 1 + \frac{1}{e^{2x} + e^x}$$

Exercice 6 : *Calculs de limites.*

1) Calculer la limite suivante :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + 3x - 1}{x^2 + 1}$$

Indication : on pourra factoriser l'expression par le terme x^2 .

2) Calculer la limite suivante :

$$\lim_{x \to +\infty} \ln(1 + \frac{1}{x}) + e^{-x} + 1$$

3) Calculer la limite suivante :

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{3+x}{x-2}$$

où $x \to 2^+$ désigne que x tend vers 2 avec $x > 2$.

Exercice 7 : *Probabilités*

Une urne contient deux boules blanches et une boule noire. On tire successivement de l'urne une boule de la manière suivante. Si la première boule est noire alors on remet la boule noire et on ajoute une boule noire dans l'urne. Si la première boule tirée est blanche, alors on ne la remet pas dans l'urne.
On notera : N_1 l'évènement "la première boule tirée est noire"

$\overline{N_1}$ l'évènement "la première boule tirée est blanche"

N_2 l'évènement "la deuxième boule tirée est noire"

$\overline{N_2}$ l'évènement "la deuxième boule tirée est blanche"

1) Construire un arbre aléatoire décrivant les deux tirages.

2) Calculer $P(N_1)$, $P_{N_1}(N_2)$, $P_{\overline{N_1}}(N_2)$.

3) Calculer $P(N_2 \cap N_1)$ et $P(N_2 \cap \overline{N_1})$. En déduire $P(N_2)$.

4) La boule tirée au deuxième tirage est noire. Calculer la probabilité que la boule tirée au premier tirage soit noire.

Exercice 8 : *Probabilités*

Soit X une variable aléatoire prenant les valeurs $-1; 0; 1$. On suppose que :
(i) l'espérance de X vaut $\frac{1}{2}$. ($E(X) = \frac{1}{2}$) .

(ii) $P(X = 0) = \frac{1}{4}$.

Déterminer les valeurs : $P(X = -1)$ et $P(X = 1)$

Exercice 9 : *Primitives et intégrales*

1) Vérifier que la fonction F définie par : $F(x) = x^2e^x - 2xe^x + 2e^x$ est une primitive de la fonction f définie par $f(x) = x^2e^x$.

En déduire que : $\int_0^1 f(x)dx$

2) Déterminer la primitive de la fonction f définie par : $f(x) = x^2 + e^x + x$ qui s'annule en 0.

Exercice 10 : *Etude de fonction*

Soit f la fonction définie pour tout $x \in]0, +\infty[$ par : $f(x) = x\ln(x) - x$

1) Vérifier que : $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$.

2) Calculer la dérivée de la fonction f sur $]0, +\infty[$.

3) En déduire le signe de $f'(x)$ sur $]0, +\infty[$.

4) Donner le tableau des variations de la fonction f sur $]0, +\infty[$.

5) Calculer $f(1)$ et $f(e)$. En déduire le signe de f sur $]0, +\infty[$.

6) Donner une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse e.

Fin du problème